Chapter 1. The Field Equations of General Relativity

1.1 Non-local lift experiments

양손에 공을 하나씩 들고 있다가 가만히 떨어뜨렸을 경우를 생각해보자. 두 공은 평행하게 떨어져서, 동일한 시간이 흐른 후에는 땅에 떨어질 것을 예상할 수 있다. 거시적 관점에서 본다면, 실제로 그런 현상이 일어난다고 할 수 있다. 다시 말해, 두 물체에 작용하는 중력장이 동일하다고 생각하면 그렇다는 뜻이다.

Newton의 역학을 따르자면 위와 같은 설명법이 전혀 어색하지 않다. 하지만, 그림 1-1에서 보이는 것과 같이, 두 물체에 작용하는 field가 아주 미세한 변화에도 감지될 수 있다고 한다면, 상황은 많이 달라지게 된다. 두 물체는 모두 지구 중심을 향해 떨어지게 되므로, 결국에는 두 개의 경로가 converge하게 된다는 것이다.

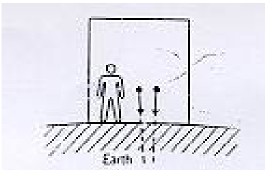

그림 1

General Relativity의 field equation은 이와 같은 미세한 변화들을 살펴봄으로써 유도될 수 있다. 우선, 우리에게 익숙한 Newton의 field equation이 위의 방법을 통해서 어떻게 유도되는지를 살펴본 후에, 보다 일반적으로 General Relativity에서는 어떻게 되는지를 살펴보겠다.

1.2 The Newtonian Equation of Deviation

진공 중의 gravitational field에서 운동하고있는 두 개의 test particle을 생각해 보자. gravitational field의 potential은 ϕ라하고, 두 입자가 각각 C_1, C_2의 경로를 따라 운동한다고 하자 (그림 1-2). 시간이 t일 때, 두 입자는 각각 P, Q에 위치해 있다. 운동에 관한 parameter로 t를 사용하면, C_1, C_2에 관한 parametric equation은 다음과 같다.

$x^\alpha = x^\alpha(t)$: for the curve C_1

$x^\alpha = x^\alpha(t) + \eta^\alpha(t)$: for the curve C_2

여기에서 η^α는 두 곡선에서 같은 시각 t일 때의 점들을 이어주는 connecting vector이다. test particle의 질량을 1이라고 하면, 입자들의 운동 방정식은 각각 다음과 같아진다.

$\ddot{x}^\alpha = -(\partial^\alpha \phi)_P$: for the particle 1 (1)

$\ddot{x}^\alpha + \ddot{\eta}^\alpha = -(\partial^\alpha \phi)_Q$: for the particle 2 (2)

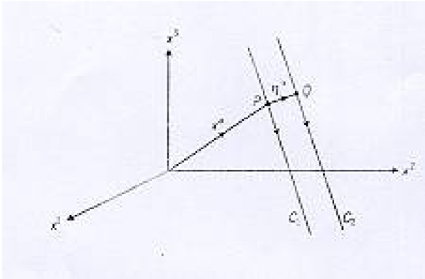

그림 2

dot는 시간에 관한 미분을 나타내는 기호이다. 처음의 가정에서 η^{α}가 매우 작다고 했으므로, 식 (2)의 우변은 3차원에서의 Taylor's theorem을 사용하여, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-(\partial^{\alpha}\phi)_Q = -(\partial^{\alpha}\phi)_P - (\eta^{\beta}\partial_{\beta}\partial^{\alpha}\phi)_P$$

이제, 식 (2)에서 식 (1)을 빼면,

$$\ddot{\eta}^{\alpha} = -\eta^{\beta}\partial_{\beta}\partial^{\alpha}\phi \quad (3)$$

이 되고, 다음과 같이 tensor $K^{\alpha}{}_{\beta}$를 정의하면,

$$K^{\alpha}{}_{\beta} = K_{\beta}{}^{\alpha} = \partial^{\alpha}\partial_{\beta}\phi$$

식 (3)은

$$\ddot{\eta}^{\alpha} + K^{\alpha}{}_{\beta}\eta^{\beta} = 0 \quad (4)$$

과 같이 된다. 이 방정식을 Newtonian Equation of Deviation 이라고 한다. 위의 유도 과정에서 알 수 있는 것처럼, Newtonian Equation of Deviation은 바로 connecting vector η^{α}의 운동방정식 이라고 할 수 있다.

이제 이 식에 숨겨져 있는 의미를 찾아보기로 하겠다. 위에서 도입한 tensor $K^{\alpha}{}_{\beta}$의 trace를 계산해보면,

$$K^{\alpha}{}_{\alpha} = \partial^{\alpha}\partial_{\alpha}\phi = \partial^1\partial_1\phi + \partial^2\partial_2\phi + \partial^3\partial_3\phi = \nabla^2\phi$$

따라서, $K^{\alpha}{}_{\beta}$의 trace 가 0이 되는 조건을 요구하면, Laplace's equation을 얻게 된다. 다시 말해서, empty space에서의 Newtonian Field Equation이 되는 것이다.

1.3 The Equation of Geodesic Deviation

parametric equation이 다음과 같이 주어지는 surface S를 고려해보자.

$$x^a = x^a(\tau, \upsilon)$$

여기에서, τ는 주어진 geodesics를 따를 때의 고유시간이고, υ는 이웃한 geodesics를 의미한다.

다음과 같이 두 개의 vector filed를 정의하자.

$$v^a = \frac{dx^a}{d\tau}$$

$$\zeta^a = \frac{dx^a}{d\upsilon}$$

v^a는 tangent vector라 하고, ζ^a은 connection vector라고 한다 (그림 1-3). 두 vector field 사이의 commutator는 다음을 만족한다.

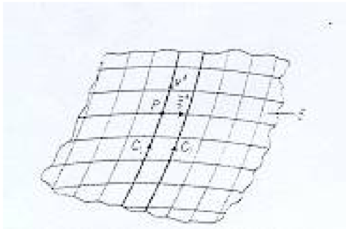

그림 3

$$\begin{aligned}[v,\zeta]^a &= v^b\partial_b\zeta^a - \zeta^b\partial_b v^a \\ &= \frac{dx^b}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{dx^a}{d\upsilon}\right) - \frac{dx^b}{d\upsilon}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{dx^a}{d\tau}\right) \\ &= \frac{d^2x^a}{d\tau d\upsilon} - \frac{d^2x^a}{d\upsilon d\tau} \\ &= 0\end{aligned} \qquad (5)$$

위의 마지막 두 줄을 다른 방법으로 표현하면,

$$\nabla_v\zeta^a - \nabla_\zeta v^a = 0 \qquad (6)$$

이 되고, 양변에 v^a에 관한 covariant derivative를 취해주면

$$\nabla_v\nabla_v\zeta^a = \nabla_v\nabla_\zeta v^a \qquad (7)$$

가 된다. 이제, 다음의 identity를 사용하고,

$$\nabla_X(\nabla_Y Z^a) - \nabla_Y(\nabla_X Z^a) - \nabla_{[X,Y]}Z^a = R^a{}_{bcd}Z^bX^cY^d$$

$X^a = Z^a = v^a, Y^a = \zeta^a$라고 놓으면 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\begin{aligned}&\nabla_v\nabla_\zeta v^a - R^a{}_{bcd}v^bv^c\zeta^d = 0 \\ &\therefore \frac{D^2\zeta^a}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd}v^bv^c\zeta^d = 0\end{aligned} \qquad (8)$$

앞에서, Newtonian equation of deviation을 구한 결과식인 식 (4)와 비교를 해보자. 식 (4)에서의 η^a는 분명히 3개의 component를 갖고 있다. 하지만, 지금 구해진 식의 ζ^a은 4개의 component를 갖고 있으므로, 서로 비교하는 것이 불가능해 보인다. 따라서, Equation of Geodesic Deviation을 구하기 위해서는 위에 쓰인 ζ^a을 3개의 component만 갖고있는 vector로 바꾸는 작업이 필요하다. 다시 말해서, 4 vector인 ζ^a 에서 spatial term만을 취하기로 하겠다는 뜻이다.

이런 작업을 하기 위해서, 다음과 같이 projection operator $h^a{}_b$와 orthogonal connecting vector η^a을 정의하자.

$$h^a{}_b \equiv \delta^a{}_b - v^av_b$$

$$\eta^a \equiv h^a{}_b \zeta^b$$

한편, v^a는

$$v^a v_a = g_{ab} v^a v^b = g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = 1 \qquad (9)$$

이므로 unit tangent vector 이다. 위의 양변에 ζ^a에 관한 covariant derivative를 취하면,

$$\nabla_\zeta (v^a v_b) = v^a (\nabla_\zeta v_a) + v_a (\nabla_\zeta v^a) = 2 v_a \nabla_\zeta v^a = 0$$

따라서,

$$\begin{aligned}
\frac{D\zeta^a}{D\tau} &= \nabla_v \zeta^a \\
&= \nabla_v (\eta^a + v^a v_b \zeta^b) \\
&= \nabla_v \eta^a + (\nabla_v v^a) v_b \zeta^b + v^a (\nabla_v v_b) \zeta^b + v^a v_b (\nabla_v \zeta^b) \\
&= \frac{D\eta^a}{D\tau} + v^a v_b (\nabla_\zeta v^b) \\
&= \frac{D\eta^a}{D\tau}
\end{aligned}$$

$$R^a{}_{bcd} v^v v^c \zeta^d = R^a{}_{bcd} v^b v^c (\eta^d + v^d v_e \zeta^e) = R^a{}_{bcd} v^b v^c \eta^d$$

이 된다. 위의 마지막 결과에서는 $R^a{}_{bcd}$가 index c,d를 교환하는 것에 anti-symmetric하다는 사실을 사용했다. 이제 식 (8)을 다시 쓰면,

$$\frac{D^2 \eta^a}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd} v^b v^c \eta^d = 0 \qquad (10)$$

이 된다.

1.4 The Newtonian Correspondence

C_1 위의 각 점 P에 대해서, 다음 3개의 unit spacelike vector로 이루어진 orthogonal frame을 생각해보자.

$$e_\alpha{}^a = (e_1{}^a, e_2{}^a, e_3{}^a)$$

이 vector들은 모두 v^a에 서로 orthogonal 하다. 이제,

$$e_0{}^a \equiv v^a$$

라고 정의하면, 다음의 orthonormality relation을 얻게 된다.

$$e_i{}^a e_{ja} = \eta_{ij}$$

여기에서, η_{ij}은 diag(1, -1, -1, -1)로 주어지는 Minkowski metric이다. 이렇게 정의를 해두면, orthogonal connecting vector η^a의 spatial frame components를 다음과 같이 생각해줄 수 있다.

$$\eta^\alpha = e^\alpha{}_a \eta^a$$

마지막으로, 식 (10)에서 spatial part를 뽑아내기 위해 식 (10)의 양변에 $e^{\alpha}{}_{a}$를 operate 해주면,

$$\frac{D^2\eta^{\alpha}}{D\tau^2} - R^a{}_{bcd}\, e^{\alpha}{}_{a} v^b v^c \eta^d = 0$$

한편, 위의 식에 쓰인 η^d는

$$\eta^d = \delta^d{}_c \eta^c = e_i{}^d\, e^i{}_c \eta^c = e_0{}^d\, e^0{}_c \eta^c + e_\beta{}^d\, e^\beta{}_c \eta^c = e_\beta{}^d \eta^\beta$$

가 되므로, 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\frac{D^2\eta^a}{D\tau^2} + K^{\alpha}{}_{\beta} \eta^\beta = 0$$

$$\text{where,}\quad K^{\alpha}{}_{\beta} = - R^a{}_{bcd}\, e^{\alpha}{}_{a} v^b v^c e_\beta{}^d \qquad (11)$$

이 식이 바로 Newtonian equation of deviation 식 (4)에 대응되는 식이다.

1.5 The Vacuum Field Equations of General Relativity

Newtonian equation of deviation에서, tensor $K^{\alpha}{}_{\beta}$의 trace가 없어지는 조건을 요구하면, Newtonian Field equation을 이끌어 낼 수 있음을 살펴보았다. 마찬가지 방법으로, 식 (11)에 쓰인 tensor의 trace가 없어지는 조건을 생각해보자.

$$R^a{}_{bcd}\, e^{\alpha}{}_{a} v^b v^c e_a{}^d = 0 \qquad (12)$$

이 문제를 해결하기 위해, 다음과 같이 점 P에서의 special coordinate system을 도입하기로 하겠다.

$$e_0{}^a \doteq (1,0,0,0),\quad e_1{}^a \doteq (0,1,0,0),\quad e_2{}^a \doteq (0,0,1,0),\quad e_3{}^a \doteq (0,0,0,1)$$

위의 식에서 " $\doteq$"는 등식이 특별한 경우에만 성립한다는 것을 의미한다. 이렇게 쓰면 식 (12)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R^{\alpha}{}_{00\alpha} \doteq 0$$

Riemann tensor는 가장 끝에 있는 두 개의 index들의 교환에 대해 anti-symmetric 하므로, 모든 coordinate에 대해,

$$R^0{}_{000} = 0$$

이 성립한다. 따라서 두 개의 결과를 종합하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R^a{}_{00a} \doteq 0$$

$$\therefore 0 \doteq R^a{}_{00a} \doteq R^a{}_{bca}\, \delta^b{}_0\, \delta^c{}_0 \doteq R^a{}_{bca} v^b v^c = - R^a{}_{bac} v^b v^c = - R_{bc} v^b v^c$$

위의 제일 마지막에 쓰인 $R_{bc} v^b v^c$은 scalar 이므로, 만일 그 항이 어떤 coordinate에서 0이 된다면, 다른 모든 coordinate에서도 0이 될 것이다. 또한, 그 양은 모든 관측자에 대해, 다시 말해서 점 P에서의 모든 timelike vector v^a에 대해 0이 되어야 하므로,

$$[R_{ab}]_P = 0$$

이 성립하고, 점 P가 arbitrary하므로, 다음 결과를 얻는다.

$$R_{ab} = 0$$

이것이 바로 general relativity에서의 vacuum field equation이다. 혹은 동등하게 $G_{ab} = 0$ 이라고 쓸 수도 있다.

Chapter 2. The Schwarzschild Solution

Chapter 1에서, vacuum field equation을 구해 보았다.

그렇게 해서 구한 equation은 nonlinear partial differential equation이므로 그 solution을 구한다는 것은 거의 불가능한 일이고, 단지 어떤 대칭조건이 만족되는 몇 가지 특수한 경우들에 대해서만이 그 solution이 알려져 있다.

그러한 solution들 중에서, 우리는 spherical symmetry가 있는 경우를 다룰 것이다. 이러한 대칭이 있는 경우의 solution으로 주어지는 metric을 Schwarzchild metric이라고 부른다. 이제, spherical symmetry가 의미하는 바를 좀 더 구체적으로 알아본 후 Schwarzchild metric을 구해보기로 하겠다.

2.1 Spherical symmetry

spherical summetry를 정의하는 방법에는 여러 가지가 있지만, 여기서는 가장 직관적인 해석만을 덧붙이기로 한다. spherical summetry란 어떤 점에 대해서 (편의상 원점 O를 잡기로 하자) system이 spatial rotation에 대해 invariant 한 것을 말한다.

Spherical polar coordinate를 생각해보자. 잘 알고있는 것처럼, Θ, ϕ는 각각 다음의 범위를 갖는다.

$$0 \le \Theta \le \pi$$

$$-\pi \le \phi \le \pi$$

한편, line element는 다음과 같이 표현된다.

$$ds^2 = a^2(d\Theta^2 + \sin^{2\Theta} d\phi^2)$$

2.2 Assumption

어떤 coordinate system (x^a)에 대해, 다음이 성립한다.

$$(x^a) = (x^0, x^1 \cdot x^2, x^3) = (t, r\Theta, \phi)$$

$$ds^2 = Adt^2 - 2Bdtdr - Cdr^2 - D(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) \qquad (1)$$

여기에서, A, B, C, D는 t, r에 관한 함수이다.

2.3 coordinate transformation

다음과 같은 coordinate transformation을 생각해보자.

$$r \rightarrow r' = D^{\frac{1}{2}}$$

식 (1)은 다음과 같이 변환된다.

$$ds^2 = A'(t,r')dt^2 - 2B'(t,r')dtdr' - C'(t,r')dr'^2 - r'^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) \quad (2)$$

한편, 미분방정식의 theory에서 알려진 것처럼, $A'(t,r')dt - B'(t,r')dr'$은 integration factor $I = I(t,r')$을 도입하여 total derivative로 바꾸어 줄 수 있다. 이러한 사실들을 이용하여, 새로이 time coordinate t'을 다음과 같이 정의하자.

$$dt' = I(t,r')[A'(t,r')dt - B'(t,r')dr']$$

따라서,

$$dt'^2 = I^2(A'^2dt^2 - 2A'B'dtdr' + B'^2dr'^2)$$

$$A'dt^2 - 2B'dtdr' = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - A'^{-1}B'^2dr'^2$$

이제 식 (2)를 다시 쓰면,

$$ds^2 = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - (C' + A'^{-1}B'^2)dr'^2 - r'^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2)$$

다음과 같이 두 개의 새로운 함수 v, λ를 도입하고,

$$e^v = A'^{-1}I^{-2}$$

$$e^\lambda = C' + A'^{-1}B'^2$$

prime이 붙은 것을 모두 떼어 내면, line element는 최종적으로 다음과 같은 형태가 된다.

$$ds^2 = e^v dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) \quad (3)$$

여기에서, v, λ는 모두 t, r만의 함수이다.

2.4 The Schwarzchild Solution

위의 결과들을 사용하면,

$$g_{ab} = \mathrm{diag}(e^v, -e^\lambda, -r^2, -r^2\sin^2\Theta) \text{ : covariant matric}$$

$$g^{ab} = \mathrm{diag}(e^{-v}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2}\sin^{-2}\Theta) \text{ : contravariant matric}$$

이 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

t에 관한 미분을 dot로, r에 관한 미분을 prime으로 표현하기로 한다면, Einstein tensor의 성분들 중 non-vanishing term들은 다음과 같다.[1)]

$$G_0{}^0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$G_0{}^1 = -e^{-\lambda}r^{-1}\dot{\lambda} = -e^{\lambda - v}G_1{}^0$$

$$G_1{}^1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}$$

$$G_2{}^2 = G_3{}^3 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{v'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{v'}{r} - \frac{v'^2}{2} - v''\right) + \frac{1}{2}e^{-v}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2}\right)$$

이들 중 제일 마지막에 있는 식은, 그 위의 세 식이 0이 될 때 자동적으로 0이 된다는 것을 보일 수 있다 (by Bianchi identities). 따라서, 세 개의 independent한 방정식은 다음과 같아

진다.

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0 \quad (4)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0 \quad (5)$$

$$\dot{\lambda}=0 \quad (6)$$

식 (4)와 (5)를 더해주면,

$$\lambda'+\nu'=0$$

양변을 r 에 대해 적분해주면,

$$\lambda+\nu=h(t) \quad (7)$$

여기에서, h(t)는 임의의 함수이다. 또한, 식 (6)에 의해서, 함수 λ가 오직 r만의 함수라는 것을 알 수 있고 (chap. 2.3에서, λ와 ν가 t, r만의 함수라고 했다), 따라서 식 (4)는 ordinary differential equation이 되어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e^{-\lambda}-re^{-\lambda}\lambda'=1$$

혹은 동등하게,

$$(re^{-\lambda})'=1$$

라고도 쓸 수 있다. 윗 식의 양변을 적분하면 다음을 얻는다.

$$re^{-\lambda} = r + \text{constant}$$

적분 상수를 -2m으로 잡으면,

$$e^{\lambda}=(1-2m/r)^{-1} \quad (8)$$

식 (7)과 (8)을 사용하면 구하고자 하는 metric은 다음과 같이 표현된다.

$$g_{ab}=\mathrm{diag}[e^{h(t)}(1-2m/r),\ -(1-2m/r)^{-1},\ -r^2,\ -r^2\sin^2\Theta]$$

위의 식에서, arbitrary한 항은 h(t) 뿐이므로, 이 항을 처리하기 위해 다음과 같은 coordinate transformation을 생각해보자.

$$t \rightarrow t'$$

$$t'=\int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)}du$$

여기에서, c는 임의의 상수이다. 이런 coordinate transformation을 통해서 바뀌는 metric의 성분은 오직 g'_{00} 뿐이다.[2)]

$$g'_{00}=(1-2m/r)$$

prime을 없애버리고, line element를 다시 쓰면 다음의 결과를 얻는다.

$$ds^2=(1-2m/r)dt^2-(1-2m/r)^{-1}dr^2-r^2(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\phi^2)$$

이것이 바로 Schwarzschild line element이다.